

Perception des couleurs et information quantique



MIRES AXE 2 - Juin 2022

En collaboration avec E. Provenzi (IMB)

Trichromatie VERSUS opposition

- **Trichromatie** : Newton et al. - Comment on perçoit les couleurs en mélangeant trois primaires.
- **Opposition** : Hering et al. - Comment on perçoit les couleurs en opposant les deux primaires de deux couples.

Trichromatie ET opposition

- Neurophysiologie de la rétine : Hubel et de Valois, de Valois :

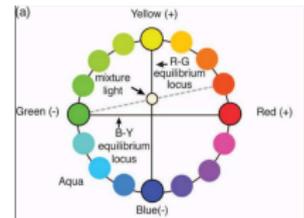
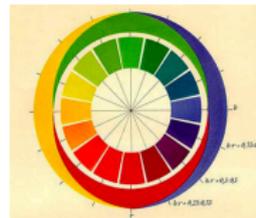
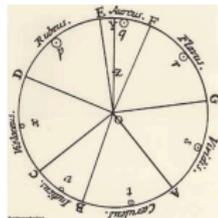
cones LMS (récepteurs visuels de sensibilités différentes)

+

Midget cells : **opposition spectrale** L-M/M-L → “RG/GR”

Bistratified cells : **opposition spectrale** (L+M)-S/S-(L+M) → “BY/YB”

Parasol cells : **non-opposition spectrale** (L+M)/-(L+M) → “BI - Wh”



Les standards de la C.I.E.

- **Couleurs perçues** : coordonnées d'un espace de dimension 3 obtenu par réduction métamérique d'un espace de dimension infinie de stimuli visuels - primaires de Wright : RGB \rightarrow XYZ \rightarrow diagramme de chromaticité xy + Y \rightarrow CIE Lab...
- **Attributs perceptuels** : brightness, lightness, colorfulness, chroma, saturation, hue, related colors, unrelated colors...

Colorfulness : Attribute of a visual sensation according to which the perceived color of an area appears to be more or less chromatic

Chroma : Colorfulness of an area judged as a proportion of the brightness of a similarly illuminated area that appears white or highly transmitting

Saturation : Colorfulness of an area judged in proportion to its brightness

- **Principaux défauts** :
 - Color matching réalisé dans des conditions contrôlées ne prenant pas en compte les attributs perceptuels et donc pas de lien entre les attributs perceptuels et les coordonnées colorimétriques.
 - Achromaticité mal définie (lightness/brightness) - Pas de prise en compte de l'opposition - ΔE de CIE Lab : métrique euclidienne (transforme les ellipses de MacAdam en cercle).
 - Incapacité à expliquer les phénomènes perceptuels constatés (effet de Hunt, de Bezhold-Brücke, de Helmholtz-Kohlrausch, de Judd, d'induction chromatique, indiscernabilité).

Fondements mathématiques historiques

- Newton, Grassmann, Helmholtz → Schrödinger : l'espace des couleurs perceptuelles est un cône \mathcal{C} convexe régulier de dimension 3.
- Resnikoff (1974), prise en compte et modélisation de variations contextuelles : \mathcal{C} est homogène sous l'action des "background illumination changes" → théorème de classification
 - $\mathcal{C} \simeq \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ muni de la métrique plate de Helmholtz Stiles (théorie classique de la C.I.E.) ;
 - $\mathcal{C} \simeq \mathcal{H}^+(2, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}_+ \times \mathcal{H}_1^+(2, \mathbb{R})$ muni de la métrique de Rao-Siegel à courbure constante négative (théorie non classique).

Deux citations

- B. Russel, 1912 : "When, in ordinary life, we speak of the colour of the table, we only mean the sort of colour which it will seem to have to a normal spectator from an ordinary point of view under usual conditions of light. But the other colours which appear under other conditions have just as good a right to be considered real; and therefore, to avoid favoritism, we are compelled to deny that, in itself, the table has any one particular colour".
- P.A.M. Dirac, 1928 : "Science is concerned only with observable things and that we can observe an object only by letting it interact with some outside influence" - "Questions about what decides the photon's direction of polarization when it does go through should be regarded as outside the domain of science".



La piste quantique

- Les concepts :
 - A **visual scene** is an environment that has been prepared to allow human observers to perform measurements through their visual system registering the outcomes as perceived colors.
 - A **perceptual observable**, or simply an observable, is defined by an equivalence class of measurements performed on a visual scene, where two measurements are equivalent if, no matter how they have been carried out, they lead to the registration of the same set of outcomes.
 - A **perceptual state**, or simply a state, is an equivalence class of preparations of a visual scene, the equivalence being the fact that, independently of the way in which the visual scene has been prepared, the measurements outcomes are the same.
- La description des couleurs perçues ne fait plus à partir des trois coordonnées d'un espace plat mais à partir de la **dualité entre états perceptuels et observables perceptuels**. Les couleurs perçues sont inextricablement associées à des opérateurs de mesure.
- La démarche :
 - **Axiome** historique de trichromatie.
 - **Développements mathématiques** permettant de définir rigoureusement les concepts de base et de mettre en œuvre un calcul opérationnel.
 - **Confrontation** à la phénoménologie de la perception des couleurs.

Les algèbres de Jordan

- \mathcal{C} + auto-dualité + Koecher-Vinberg : \mathcal{C} cône symétrique de dimension 3 \iff cône des observables positifs d'une algèbre de Jordan form. réelle \mathcal{A} de dimension 3.
- Classification de Jordan, von Neumann, et Wigner : $\mathcal{A} \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ ou $\mathcal{A} \simeq \mathcal{H}(2, \mathbb{R})$
 \Rightarrow classification de Resnikoff.
- $\mathcal{H}(2, \mathbb{R}) \stackrel{\times}{\simeq}$ Spin factor $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2$ avec $(\alpha, v) \circ (\beta, w) = (\alpha\beta + v \cdot w, \alpha w + \beta v)$

$$\mathcal{C} \simeq \mathcal{L}^+ = \{a = (\alpha, v), a \cdot_{\mathcal{M}} a > 0\}$$

- L'espace riemannien de la trichromie $\overline{\mathcal{L}^+}$ contient naturellement le disque $\mathcal{K}_{1/2} = \{a = (\alpha, v) \in \overline{\mathcal{L}^+}, \alpha = 1/2\}$ muni de la distance de Hilbert :

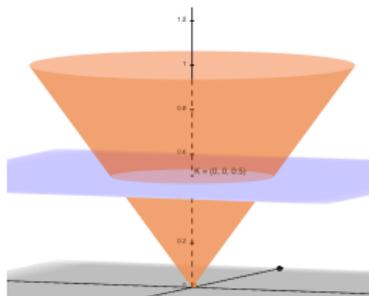


FIGURE – Le disque $\mathcal{K}_{1/2}$ dans $\overline{\mathcal{L}^+}$

Les états perceptuels

- Matrices de densité : $\rho \in \mathcal{H}(2, \mathbb{R})$ avec $\rho \geq 0$ et $\text{tr}(\rho) = 1$. Matrices de Pauli σ_i
- Espace des états \mathcal{S} : disque unité plongé dans le disque de Klein $\mathcal{K}_{1/2}$ par :

$$s = (v_1, v_2) \mapsto \frac{1}{2}(1, v) = (1/2, (v_1/2, v_2/2))$$

- $\mathcal{K}_{1/2}$ représente l'espace des états du rebit.
- - Opposition "rouge-vert" : $\langle \sigma_1 \rangle_\rho = \text{Trace}(\rho \circ \sigma_1) = r \cos \theta$.
- - Opposition "jaune-bleu" : $\langle \sigma_2 \rangle_\rho = \text{Trace}(\rho \circ \sigma_2) = r \sin \theta$.
- Disque de Bloch \simeq disque de Hering :

$$\rho(r, \theta) = \rho_0 + \frac{r \cos \theta}{2} (\rho(1, 0) - \rho(1, \pi)) + \frac{r \sin \theta}{2} (\rho(1, \pi/2) - \rho(1, 3\pi/2))$$

- Entropie de von Neumann : $S(\rho) = -\text{Trace}(\rho \log \rho)$ avec $S(\rho) = 0 \Leftrightarrow \rho$ est un état pur.
- État d'entropie maximale : $\rho_0 = Id_2/2$ avec $S(\rho_0) = \log 2$, état achromatique.
- Complémentarité naturelle entre la trichromatie et l'opposition !

Observables perceptuels et effets

- Cône des états :

$$\mathcal{C}(\mathcal{S}) = \{\alpha(1, \mathbf{v}), \alpha \geq 0, \mathbf{v} \in \mathcal{S}\} \simeq \overline{\mathcal{L}^+}$$

- Espace des effets

$$\mathcal{E}(\mathcal{S}) = \{e \in \mathcal{C}^*(\mathcal{S}), e \leq Id\}$$

- $e = \alpha(1, v_1, v_2) \simeq 2\alpha\rho(r, \theta)$ - la **magnitude** α de e , $0 \leq \alpha \leq 1$, est le résultat de l'évaluation de e sur l'état d'entropie maximale ρ_0 : $\alpha = \langle e \rangle_{\rho_0} = \text{Tr}(\rho_0 \circ 2\alpha\rho(r, \theta))$.
- $e/(2\alpha) \simeq \rho(r, \theta)$ est l'**état chromatique** de e avec les degrés d'opposition $\langle \sigma_1 \rangle_{\rho(r, \theta)}$ et $\langle \sigma_2 \rangle_{\rho(r, \theta)}$.
- Color solid de Valois et de Valois, Ostwald et Hubel!

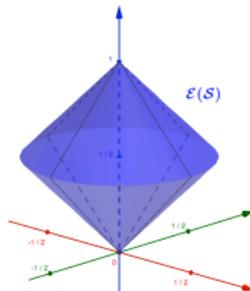


FIGURE – Le double cône $\mathcal{E}(\mathcal{S})$



Opérateurs de Krauss et mesures de Lüders

- s représenté par ρ_s , e représenté par η_e

$$\psi_e(s) = \eta_e^{1/2} \rho_s \eta_e^{1/2}, \quad \text{Tr}(\psi_e(s)) = \langle e \rangle_s, \quad \phi_e(s) = \psi_e(s) / \text{Tr}(\psi_e(s))$$

- **Représentation spinorielle** $\xi : \mathcal{M}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}^{1,2})$

$$A \mapsto \xi(A) := \chi \circ \text{Ad}_A \circ \chi^{-1}$$

$$\chi(\psi_e(s)) = 2e_0 \xi(\rho_{e/2e_0}^{1/2})(\chi(\rho_s))$$

Opérateurs de Krauss et boosts de Lorentz

$$\xi(\rho_s^{1/2}) = \frac{1}{2\gamma_s} B(v_s) = \begin{pmatrix} \gamma_s & \gamma_s v_s^t \\ \gamma_s v_s & \sigma_0 + \frac{\gamma_s^2}{1+\gamma_s} v_s v_s^t \end{pmatrix}$$

$$\chi(\psi_e(s)) = e_0(1 + v_e \cdot v_s) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ v_e \oplus v_s \end{pmatrix}$$

$$u \oplus w = \frac{1}{1 + u \cdot w} \left\{ u + \frac{1}{\gamma_u} w + \frac{\gamma_u}{1 + \gamma_u} (u \cdot w) u \right\}$$

La perception des couleurs est un phénomène relativiste (cf Yilmaz) !

Équation de matching chromatique

(e^1, s_1) et (e^2, s_2) avec s_1 et s_2 représentant deux préparations d'une scène visuelle, et e^1 et e^2 représentant deux couleurs perçues identifiées par deux observateurs o_1 et o_2 , adaptés à s_1 et s_2 , le matching chromatique est donné par

$$\varphi_{e^1}(s_1) = \varphi_{e^2}(s_2) \iff v_{e^1} \oplus v_{s_1} = v_{e^2} \oplus v_{s_2}$$

Chromaticity constancy et distance de Hilbert

A. Ungar et V. Fock : $ds^2 = \|v \ominus (v + dv)\|^2$ est la métrique riemannienne de Klein

$$ds^2 = \frac{(1 - v_2^2)dv_1^2}{(1 - \|v\|^2)^2} + \frac{2v_1v_2dv_1dv_2}{(1 - \|v\|^2)^2} + \frac{(1 - v_1^2)dv_2^2}{(1 - \|v\|^2)^2}$$

$$d_{\mathcal{K}}(u, v) = \tanh^{-1} \| -u \oplus v \|$$

$$\varphi_{e^1}(s_1) = \varphi_{e^2}(s_2) \iff v_{s_1} \ominus v_{s_2} = -v_{e^1} \oplus v_{e^2} \iff d_{\mathcal{K}}(v_{s_1}, v_{s_2}) = d_{\mathcal{K}}(v_{e^1}, v_{e^2})$$

Effet de Hunt

$$\beta(\|v_s\|, e_0^1, e_0^2) = \frac{e_0^1}{e_0^2} + \frac{e_0^2 - e_0^1}{e_0^2 \|v_s\|^2}$$

Retour aux attributs perceptuels de la C.I.E.

- Une aire est représentée par un état généralisé s_0s de matrice de densité généralisée $s_0\rho_s$.
- Étant donné un effet e , la **brightness** de l'aire perçue $\psi_e(s_0s)$ est la trace $\text{Tr}(\psi_e(s_0s))$ de l'état généralisé $\psi_e(s_0s)$ i.e. $e_0s_0(1 + v_e \cdot v_s)$.
- La brightness de l'aire perçue blanche $\psi_e(s_a)$ est la trace $\text{Tr}(\psi_e(s_a))$ de l'état généralisé $\psi_e(s_a)$ où s_a est l'état de matrice de densité $\sigma_0/2$.
- Le réel $\text{Tr}(\psi_e(s_0s))/\text{Tr}(\psi_e(s_a)) = s_0(1 + v_e \cdot v_s) \in [0, 1]$ est la **lightness** de l'aire perçue $\psi_e(s_0s)$.
- Matching equation \iff lightness constancy!
- La **saturation** de l'aire perçue $\psi_e(s_0s)$ est donnée par l'entropie relative

$$R(\rho_{\varphi_e(s_0s)} || \rho_{s_a}) = 1 - S(\rho_{\varphi_e(s_0s)})$$

- La **teinte** de l'aire perçue $\psi_e(s_0s)$ est l'état pur $\overline{\varphi_e(s_0s)}$ tel que

$$\overline{\varphi_e(s_0s)} = \underset{\rho \text{ pure state}}{\text{arg min}} R(\rho || \varphi_e(s_0s))$$

- “When geometry meets psycho-physics and quantum mechanics : Modern perspectives on the space of perceived colors”, M. Berthier and E. Provenzi, in Geometric Science of Information, F. Nielsen and F. Barbaresco (Eds.) : GSI 2019, LNCS 11712, p. 621-630, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2019.
- “Geometry of color perception. Part 2 : perceived colors from real quantum states and Hering’s rebit”, M. Berthier, The Journal of Mathematical Neuroscience, 10, 14, 2020.
- “From Riemannian trichromacy to quantum color opponency via hyperbolicity”, M. Berthier and E. Provenzi, J. Math. Imaging Vis., 63, 681-688 (2021).
- “The quantum nature of color perception : Uncertainty relations for chromatic opposition”, M. Berthier and E. Provenzi, J. Imaging, 7(2), 40, 2021.
- “The relativity of color perception”, M. Berthier, V. Garcin, N. Prencipe and E. Provenzi, Journal of Mathematical Psychology, 103 (2021) 102562.
- “Hunt’s colorimetric effect from a quantum measurement viewpoint”, M. Berthier and E. Provenzi, in Geometric Science of Information, F. Nielsen and F. Barbaresco (Eds.) : GSI 2021, LNCS 12829, p. 172-180, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2021.
- “Quantum measurement and color perception : theory and applications”, M. Berthier and E. Provenzi, Proceedings of the Royal Society A, Vol. 478, Issue 2258, 2022.
- “A quantum information-based refoundation of color perception concepts”, M. Berthier, N. Prencipe, and E. Provenzi, preprint.