Algorithmes de Fast Marching et structures topologiques combinatoires

Sofian TOUJJA[1],

BAY Thierry[2], DAMBRINE Julien[3], BELHAOUARI Hakim[1], FUCHS Laurent[1].

Laboratoires
[1] XLIM (Poitiers)
[2] LAMAV (Valenciennes)
[3] LMA (Poitiers)

Journée thématique MIRES-MARGAUX 13 avril 2022

Sommaire

Positionnement/Motivations

Idées de base

Objectifs

Modéliser l'évolution de structures volumiques.

- Partir d'une forme de départ et approcher une forme cible.
- « Remplir » l'intérieur d'une forme en fonction des contraintes appliquées sur le contour via l'optimisation topologique

En résumé : coupler l'optimisation topologique et l'évolution de forme.

Positionnement/Motivations

Évolution de contours

Fast Marching Method

- Algorithme connu de propagation de front.
- Utilisation d'une surface de temps d'arrivée.
- Approche implicite, façon efficace de résoudre l'équation Eikonale (en une passe, à la manière de Dijkstra)

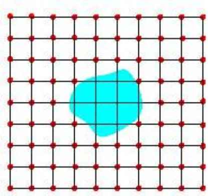


Figure – Surface de temps d'arrivées

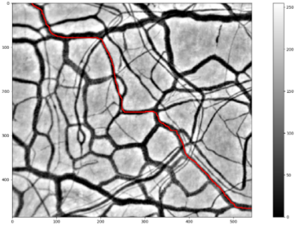
[Sethian, 2006]

Positionnement/Motivations

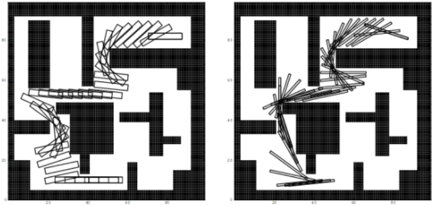
Évolution de contours

Fast Marching Method

- Beaucoup d'applications (calcul de distances, géodésiques, détection de contours, calcul de chemin optimal, etc)
- Sur des grilles orthonormées ou sur des maillages triangulés.



[Alblas and Boink, 2018]



[Sethian, 1999]

Utiliser le fast marching sur une structure topologique ?

Positionnement/Motivations

Utiliser une structure topologique

Pourquoi une structure topologique

- Adjacence entre les éléments (parcours, accès aux éléments, etc).
- Formalisation homogène en toute dimension.
- Non-contraint à une structure géométrique particulière (grille régulière, soupe de triangles, etc)

Rendre plus générique la description de l'algorithme de Fast Marching.

Positionnement/Motivations

Jerboa

Intérêts

- Fournit une implémentation de cartes généralisées.
- Plonger la structure topologique dans une géométrie
- Garantir des propriétés topologiques et géométriques

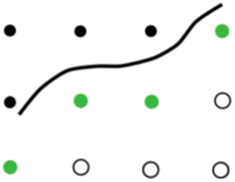
`https://xlim-sic.labo.univ-poitiers.fr/jerboa/`

Fast Marching

Généralités

Fast Marching - Discrétisation

- Le but : calculer le temps d'arrivée d'un front à un point donné de l'espace.
- Discrétisation : utilisation d'une grille dont chaque sommet comporte 3 états (frozen (noir), narrowband (vert) et far (blanc)).



[Sethian, 1996]

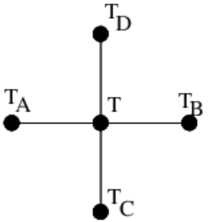
Fast Marching

Généralités

Base du FMM

Le but est de résoudre l'équation Eikonale :

$$| \nabla T | = F(x, y) \qquad (1)$$



[Kimmel and Sethian, 1998]

Schéma numérique

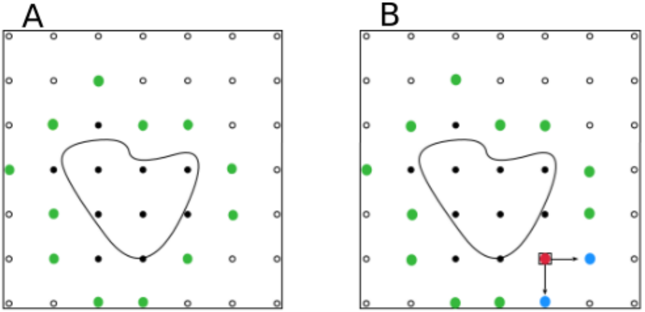
Approximation « upwind » du gradient (2D) :

$$\left[max(D_{ij}^{-x} T, -D_{ij}^{+x} T, 0)^2 + \quad max(D_{ij}^{-y} T, -D_{ij}^{+y} T, 0)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = F_{ij} \qquad (2)$$

Avec $D_{ij}^{-x} = \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{h}$ et $D_{ij}^{+x} = \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{h}$

Algorithme du Fast Marching - 1 itération

Étape 1 : Recherche du plus proche voisin.



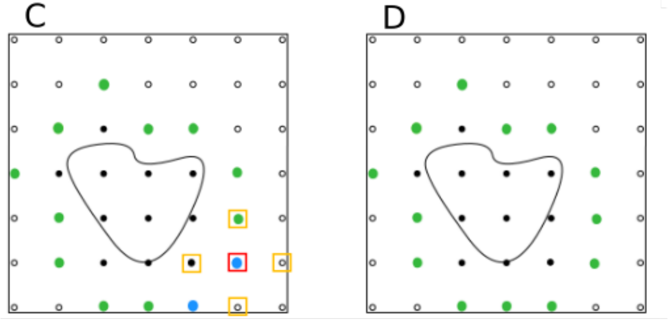
[Bærentzen, 2001]

Fast Marching

Généralités

Algorithme du Fast Marching - 1 itération

Étape 2 : Calcul de distance et ajout de nouveaux voisins.



[Bærentzen, 2001]

Fast Marching

Exploitation dans les maillages

Application

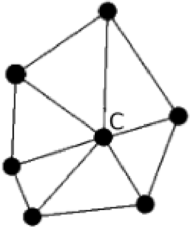
- On ne peut pas appliquer telle quelle la méthode de fast marching sur des mesh 3D.
  $\Longrightarrow$ Difficulté dû aux diverses arités de faces.
- Il existe une extension du fast marching applicable sur des mesh 3D triangulés. [Kimmel and Sethian, 1998]
  $\Longrightarrow$ Résolution partielle pour des triangles bien sentis (angle aigu).

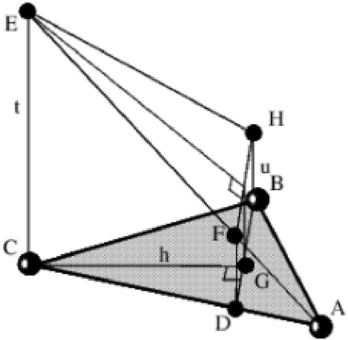
Fast Marching

Exploitation dans les maillages

Domaine triangulé

- Plusieurs triangles partagent C, on choisit ici de minimiser T(C).

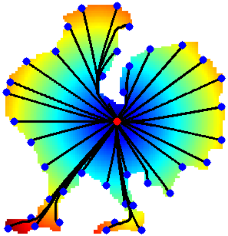


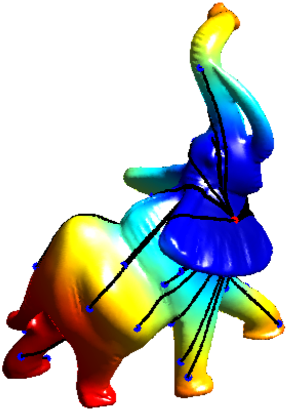


[Kimmel and Sethian, 1998]

Fast Marching
Résultats

Visualisation de quelques résultats :





[Peyre, 2009]

Carte généralisée (G-Cartes)

- Structure topologique représentant un objet par ses bords (B-rep)
- Subdivisions successives en plusieurs cellules (volumes, faces, arêtes, sommets, ...)
- Définition homogène en toute dimension

Soit $n \geq 0$, une n-carte généralisée est une algèbre $G = (B, \alpha_0, ..., \alpha_n)$ où :

- B est un ensemble fini de brins (élément atomique) ;
- $\forall i : 0 \leq i \leq n, \alpha_i$ est une involution sur B ;
- $\forall i, j : 0 \leq i \leq i + 2 \leq j \leq n, \alpha_i \circ \alpha_j$ est une involution sur B.

[Damiand, 2010]

G-cartes et Jerboa
G-Cartes

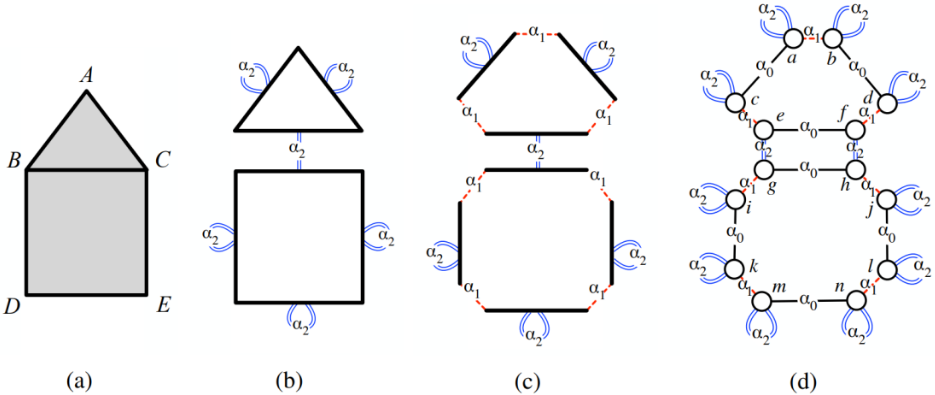
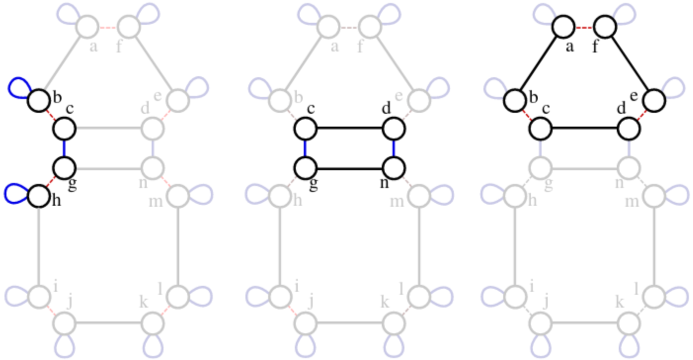


Figure – G-Carte par décompositions successives

[Gauthier et al., 2015]

Orbite

Une orbite est un sous-graphe d'une G-Carte notée $\langle \alpha_x, \alpha_y, ... \rangle$*(brin)*



(a) Sommet : $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle(c)$ (b) Arête : $\langle \alpha_0, \alpha_2 \rangle(c)$ (c) Face : $\langle \alpha_0, \alpha_1 \rangle(c)$

[Gauthier et al., 2015]

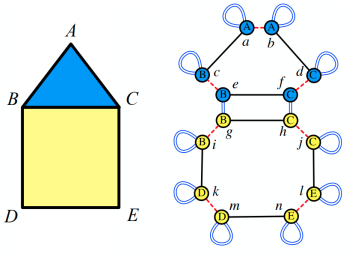
Plongements

Un plongement est une propriété géométrique ajoutée à une cellule.

Exemple

Deux plongements :

- couleur : $\langle \alpha_0, \alpha_1 \rangle$ qui associe une couleur à une face
- sommet : $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ qui associe un nom à un sommet



(a) (b)

[Gauthier et al., 2015]

Réalisation

Travail en cours

Utilisation des g-cartes

- Utiliser les plongements.
- Utiliser les orbites pour parcourir le voisinage.

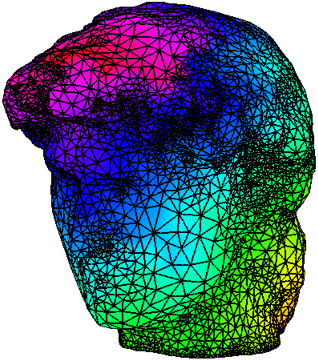
Plongements utilisés :

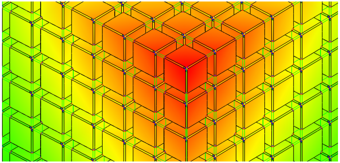
- point : $\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$, coordonnées en trois dimensions.
- fmmVoxel : $\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$, état et temps d'arrivée estimée du front.
- fmmPriorityQueue : $\langle \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$, file de priorité contenant les sommets dans l'état « narrowband ».

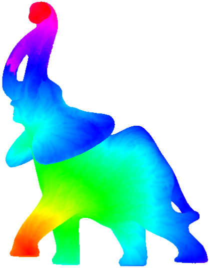
Réalisation

Travail en cours

Quelques résultats :







Moins de 1% de différence en comparaison avec la solution [Peyre, 2009]

Conclusion/perspectives

Conclusion

- Cette séparation topologie/géométrie permet de faciliter les traitements uniquement topologiques ou uniquement géométriques. Il simplifie l'accès aux informations et leur modifications.
- Proposition d'adaptation et d'application du Fast Marching dans une structure topologique.

Perspectives

- Autre algorithme d'évolution de contour [Chassagne et al., 2020].
- Intérieur de l'objet avec évolution de la topologie (optimisation topologique).

Références I

Alblas, D. and Boink, Y. (2018).

Implementing and Analysing the Fast Marching Method.

page 20.

Bærentzen, J. (2001).

On the implementation of fast marching methods for 3D lattices.

Chassagne, R., Dambrine, J., and Obiwulu, N. (2020).

A new geometrical approach for fast prediction of front propagation.

Computers & Geosciences, 136 :104416.

Damiand, G. (2010).

Contributions aux Cartes Combinatoires et Cartes Généralisées : Simplification, Modèles, Invariants Topologiques et Applications.

Références II

Gauthier, V., Belhaouari, H., and Arnould, A. (2015).

Évaluation de la modélisation à base de transformation de graphes avec Jerboa.

In *Journées de l'Association Française Graphique (AFIG)*, Lyon, France.

Kimmel, R. and Sethian, J. (1998).

Computing geodesic paths on manifolds.

Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 95 :8431 – 8435.

Peyre, G. (2009).

Toolbox fast marching.

Sethian, J. (2006).

Fast Marching Methods : A boundary value formulation.

Sethian, J. A. (1996).

Theory, algorithms, and applications of level set methods for propagating interfaces.

Acta Numerica, 5 :309–395.

Références III

Sethian, J. A. (1999).

Fast marching methods.

SIAM Review, 41(2) :199–235.

Annexes

Règles Jerboa

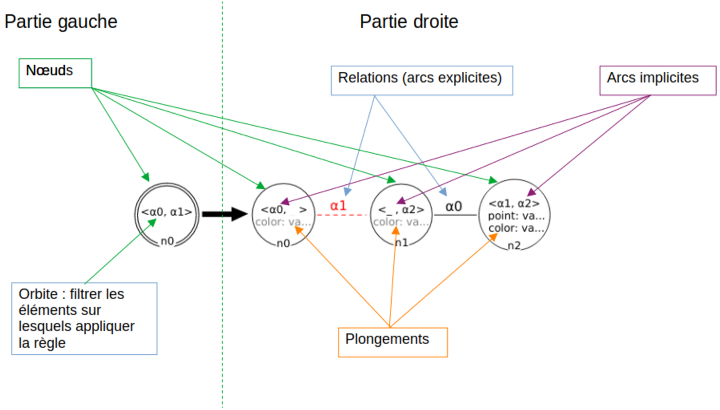
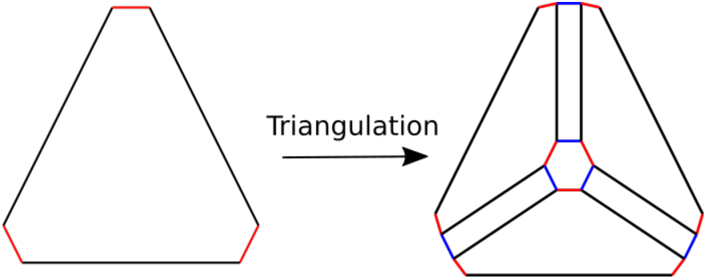


Figure – Squelette d'une règle

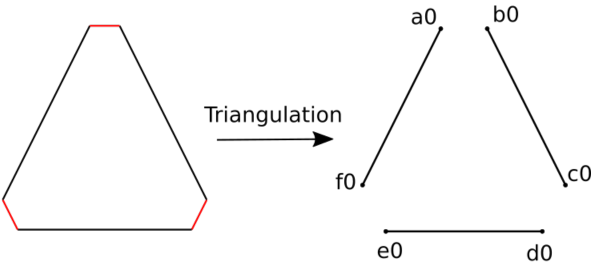
Annexes

Étude de cas : triangulation d'une face



Annexes

Étude de cas : triangulation d’une face



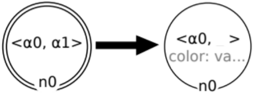


Figure 4: Règle de triangulation d’une face

Annexes

Étude de cas : triangulation d'une face

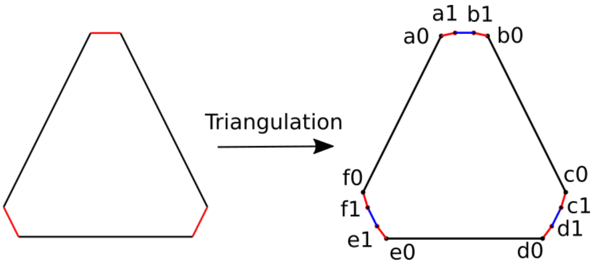
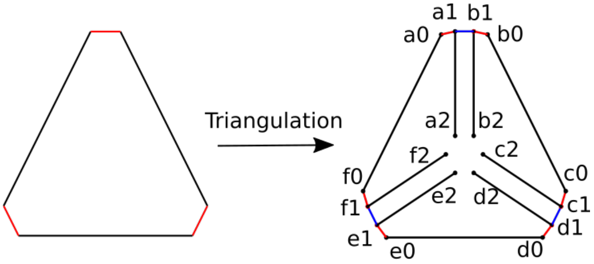


Figure 4: Règle de triangulation d'une face

Annexes

Étude de cas : triangulation d'une face



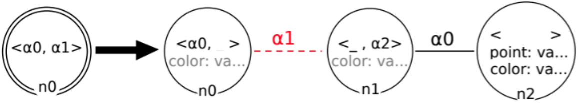
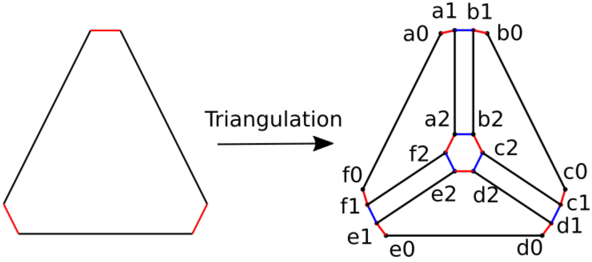


Figure 4: Règle de triangulation d'une face

Annexes

Étude de cas : triangulation d'une face



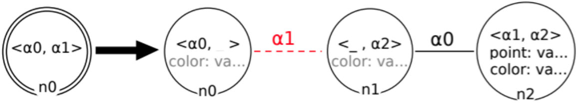


Figure 4: Règle de triangulation d'une face

Étude de cas : triangulation d'une face

Nous venons de créer une règle permettant de trianguler n'importe quelle face !