

Relations entre les différentes définitions de stabilité pour les modèles 2D de Roesser linéaires discrets

Olivier Bachelier, Nima Yeganefar, Thomas Cluzeau, Francisco Silva, Alexandre Rigaud

Présentation Mires
13 Avril 2022

Sommaire

- 1 Présentation des modèles
 - Modèle de Roesser 2D linéaire discret
 - Modèle de Fornasini-Marchesini 2D linéaire discret

Sommaire

1 Présentation des modèles

- Modèle de Roesser 2D linéaire discret
- Modèle de Fornasini-Marchesini 2D linéaire discret

2 Notions de stabilité, définitions

- Stabilité Structurale
- Stabilité Asymptotique

• Stabilité Exponentielle

Sommaire

1 Présentation des modèles

- Modèle de Roesser 2D linéaire discret
- Modèle de Fornasini-Marchesini 2D linéaire discret

2 Notions de stabilité, définitions

- Stabilité Structurelle
- Stabilité Asymptotique

3 Stabilité Exponentielle Relations déjà établies entre les notions de stabilité

- Modèle de Fornasini-Marchesini
- Modèle de Roesser

Sommaire

1 Présentation des modèles

- Modèle de Roesser 2D linéaire discret
- Modèle de Fornasini-Marchesini 2D linéaire discret

2 Notions de stabilité, définitions

- Stabilité Structurale
- Stabilité Asymptotique

3 Relations déjà établies entre les notions de stabilité

- Modèle de Fornasini-Marchesini
- Modèle de Roesser

4 Nouvelles relations

- Modèle de Fornasini-Marchesini
- Modèle de Roesser

R-mod

$$\begin{pmatrix} x_{i+1,j}^h \\ x_{i,j+1}^v \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{i,j}^h \\ x_{i,j}^v \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_{i,j}^h \\ x_{i,j}^v \end{pmatrix} \quad (1)$$

$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad x_{i,j}^h \in \mathbb{R}^{n_1}, x_{i,j}^v \in \mathbb{R}^{n_2}, A \in \mathcal{M}_{n_1+n_2}(\mathbb{R}).$

Les conditions initiales sont données par $x_{0,j}^h$ et $x_{i,0}^v$.

On note $x_{i,j} = \begin{pmatrix} x_{i,j}^h \\ x_{i,j}^v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ où $n = n_1 + n_2$.

FM-Mod

$$x_{i+1,j+1} = Ax_{i,j+1} + Bx_{i+1,j} \quad (2)$$

$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad x_{i,j} \in \mathbb{R}^n, \quad A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$

Les conditions initiales sont données par $x_{0,j}$ et $x_{i,0}$.

FM-Mod

$$x_{i+1,j+1} = Ax_{i,j+1} + Bx_{i+1,j} \quad (2)$$

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad x_{i,j} \in \mathbb{R}^n, \quad A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Les conditions initiales sont données par $x_{0,j}$ et $x_{i,0}$.

Les solutions sont données par :

$$x_{i+1,j+1} = \sum_{k=0}^j U_{i,k} A x_{0,j+1-k} + \sum_{k=0}^i U_{k,j} B x_{i+1-k,0}$$

où la suite $U_{i,j}$ est définie par :

$$\begin{cases} U_{i+1,j+1} = U_{i,j+1}A + U_{i+1,j}B, \\ \forall i,j \in \mathbb{N}, \quad U_{i,0} = A^i, \quad U_{0,j} = B^j. \end{cases}$$

Définition (R-SS)

(1) est dit *structurellement stable* si :

$$\forall |\lambda|, |\mu| \leq 1, \det \left(I_{n_1+n_2} - \begin{pmatrix} \lambda I_{n_1} & 0 \\ 0 & \mu I_{n_2} \end{pmatrix} A \right) \neq 0.$$

Définition (R-SS)

(1) est dit *structurellement stable* si :

$$\forall |\lambda|, |\mu| \leq 1, \det \left(I_{n_1+n_2} - \begin{pmatrix} \lambda I_{n_1} & 0 \\ 0 & \mu I_{n_2} \end{pmatrix} A \right) \neq 0.$$

Définition (FM-SS)

(2) est dit *structurellement stable* si :

$$\forall |\lambda|, |\mu| \leq 1, \det (I_n - \lambda A - \mu B) \neq 0.$$

Définition (R-AS)

Le point d'équilibre zéro de (1) est :

(i) *stable* (au sens de Lyapunov) si :

$$\left(\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0; \left(\|x_{0,j}^h\| < \delta_\varepsilon, \|x_{i,0}^v\| < \delta_\varepsilon \right) \Rightarrow (\|x_{i,j}\| < \varepsilon) \right), \\ \forall (i,j) \in \mathbb{N}^2.$$

(ii) *attractif* si $\lim_{i+j \rightarrow \infty} x_{i,j} = 0$ quand $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{0,j}^h = 0$ et $\lim_{i \rightarrow \infty} x_{i,0}^v = 0$.

(iii) *asymptotiquement stable* s'il est stable et attractif.

Définition (R-AS)

Le point d'équilibre zéro de (1) est :

(i) *stable* (au sens de Lyapunov) si :

$$\left(\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0; \left(\|x_{0,j}^h\| < \delta_\varepsilon, \|x_{i,0}^v\| < \delta_\varepsilon \right) \Rightarrow (\|x_{i,j}\| < \varepsilon) \right), \\ \forall (i,j) \in \mathbb{N}^2.$$

(ii) *attractif* si $\lim_{i+j \rightarrow \infty} x_{i,j} = 0$ quand $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{0,j}^h = 0$ et $\lim_{i \rightarrow \infty} x_{i,0}^v = 0$.

(iii) *asymptotiquement stable* s'il est stable et attractif.

$\lim_{i+j \rightarrow \infty} x_{i,j} = 0$ signifie :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}; \quad i + j \geq N \Rightarrow \|x_{i,j}\| \leq \varepsilon.$$

Définition (R-AS)

Le point d'équilibre zéro de (1) est :

(i) *stable* (au sens de Lyapunov) si :

$\left(\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0; \left(\|x_{0,j}^h\| < \delta_\varepsilon, \|x_{i,0}^v\| < \delta_\varepsilon \right) \Rightarrow (\|x_{i,j}\| < \varepsilon) \right),$
 $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2.$

(ii) *attractif* si $\lim_{i+j \rightarrow \infty} x_{i,j} = 0$ quand $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{0,j}^h = 0$ et $\lim_{i \rightarrow \infty} x_{i,0}^v = 0.$

(iii) *asymptotiquement stable* s'il est stable et attractif.

$\lim_{i+j \rightarrow \infty} x_{i,j} = 0$ signifie :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}; \quad i + j \geq N \Rightarrow \|x_{i,j}\| \leq \varepsilon.$$

Remarque : FM

Définition (R-ES1)

(1) est dit *exponentiellement stable* si il existe $M > 0$ et $q \in]0, 1[$ tels que, pour toutes conditions initiales $(x_{0,j}^h, x_{i,0}^v)$, $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2$,

$$\|x_{i,j}^h, x_{i,j}^v\| = \|x_{i,j}\| \leq M \left(\sum_{k=0}^j \frac{\|x_{0,k}^h\|}{q^{k+1}} + \sum_{k=0}^i \frac{\|x_{k,0}^v\|}{q^{k+1}} \right) q^{i+j}.$$

Définition (R-ES1)

(1) est dit *exponentiellement stable* si il existe $M > 0$ et $q \in]0, 1[$ tels que, pour toutes conditions initiales $(x_{0,j}^h, x_{i,0}^v)$, $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2$,

$$\|x_{i,j}^h, x_{i,j}^v\| = \|x_{i,j}\| \leq M \left(\sum_{k=0}^j \frac{\|x_{0,k}^h\|}{q^{k+1}} + \sum_{k=0}^i \frac{\|x_{k,0}^v\|}{q^{k+1}} \right) q^{i+j}.$$

Remarque : FM.

Définition (R-ES1)

(1) est dit *exponentiellement stable* si il existe $M > 0$ et $q \in]0, 1[$ tels que, pour toutes conditions initiales $(x_{0,j}^h, x_{i,0}^v)$, $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2$,

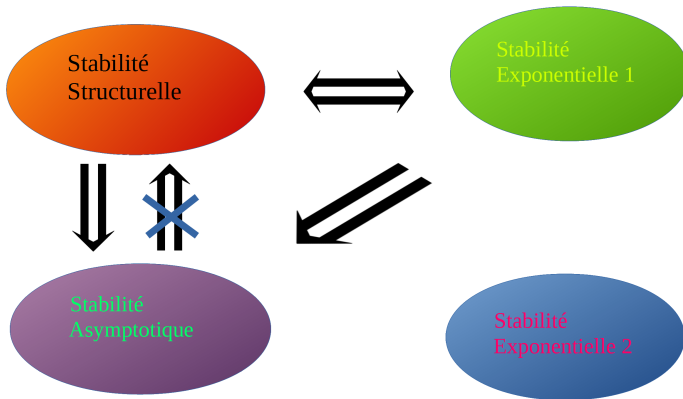
$$\|x_{i,j}^h, x_{i,j}^v\| = \|x_{i,j}\| \leq M \left(\sum_{k=0}^j \frac{\|x_{0,k}^h\|}{q^{k+1}} + \sum_{k=0}^i \frac{\|x_{k,0}^v\|}{q^{k+1}} \right) q^{i+j}.$$

Remarque : FM.

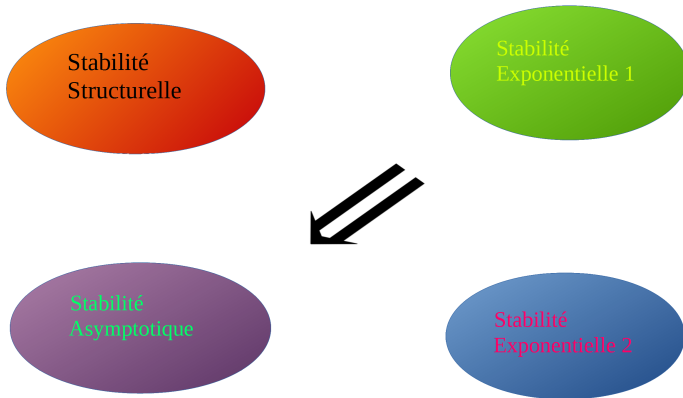
Définition (R-ES2)

(1) est dit *exponentiellement stable* si pour toutes conditions initiales $(x_{0,j}^h, x_{i,0}^v)$ telles qu'il existe $M > 0$ et $q \in]0, 1[$ tels que pour tous i, j , $\|x_{0,j}^h\| \leq Mq^j$ et $\|x_{i,0}^v\| \leq Mq^i$ alors il existe $M' > 0$ et $q' \in]0, 1[$ tels que $\|x_{i,j}\| \leq M'q'^{i+j}$ pour tout couple (i, j) .

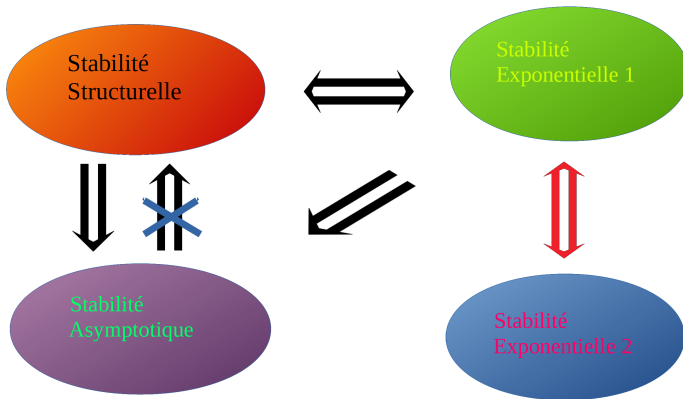
Fornasini-Marchesini :



Roesser :



Fornasini-Marchesini :



FM-ES2 $\Rightarrow$ FM-ES1

Supposons FM-ES2 et considérons la famille de CI : $\forall k \in [1..n]$,

$$x_{i,0} = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad x_{0,i}^k = \begin{cases} e^k & \text{si } i = 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $e^k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$ est le k -ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. La solution devient

$$x_{i+1,j+1} = \sum_{k=0}^j U_{i,k} A x_{0,j+1-k} + \sum_{k=0}^i U_{k,j} B x_{i+1-k,0}$$

$$x_{i+1,j+1} = U_{i,j} A e^k.$$

FM-ES2 $\Rightarrow$ FM-ES1

Supposons FM-ES2 et considérons la famille de CI : $\forall k \in [1..n]$,

$$x_{i,0} = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad x_{0,i}^k = \begin{cases} e^k & \text{si } i = 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $e^k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$ est le k -ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. La solution devient

$$x_{i+1,j+1} = \sum_{k=0}^j U_{i,k} A x_{0,j+1-k} + \sum_{k=0}^i U_{k,j} B x_{i+1-k,0}$$

$$x_{i+1,j+1} = U_{i,j} A e^k.$$

Les CI étant à décroissance exponentielle, $\forall k \in [1..n], \exists M_k > 0, q_k \in (0, 1)$:

$$\|x_{i,j}\| = \|U_{i,j} A e^k\| \leq M_k q_k^{i+j} \leq M q^{i+j},$$

FM-ES2 $\Rightarrow$ FM-ES1

Il existe M' tel que

$$\|U_{i,j}A\| \leq M' q^{i+j},$$

$$\|U_{i,j}B\| \leq M' q^{i+j} \text{ (par symétrie).}$$

FM-ES2 $\Rightarrow$ FM-ES1

Soient $x_{0,j}$ et $x_{i,0}$ des CI quelconques. En reprenant l'expression de la solution de FM :

$$\begin{aligned}
 \|x_{i+1,j+1}\| &\leq \sum_{k=0}^j \|U_{i,k}A\| \|x_{0,j+1-k}\| + \sum_{k=0}^i \|U_{k,j}B\| \|x_{i+1-k,0}\| \\
 &\leq M' \left(\sum_{k=0}^j q^{i+k} \|x_{0,j+1-k}\| + \sum_{k=0}^i q^{j+k} \|x_{i+1-k,0}\| \right) \\
 &\leq M' \left(\sum_{k=1}^{j+1} q^{i+j+1-k} \|x_{0,k}\| + \sum_{k=1}^{i+1} q^{i+j+1-k} \|x_{k,0}\| \right) \\
 &\leq M' \left(\sum_{k=0}^j \frac{\|x_{0,k}\|}{q^k} + \sum_{k=0}^i \frac{\|x_{k,0}\|}{q^k} \right) q^{i+j}
 \end{aligned}$$

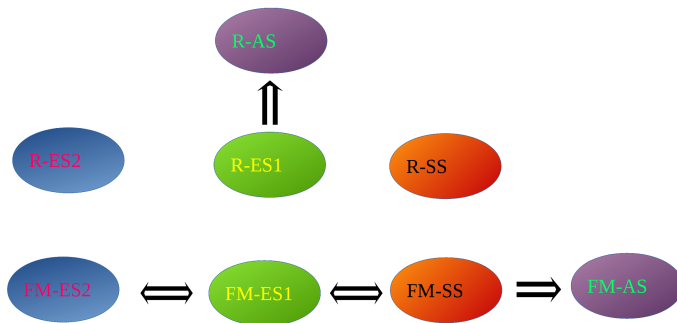
Nous allons utiliser les relations connues pour FM afin d'établir des nouvelles relations pour Roesser.

Le modèle de Roesser peut se réécrire comme le modèle de Fornasini-Marchesini suivant :

$$x_{i+1,j+1} = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) x_{i,j+1} + \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right) x_{i+1,j}$$

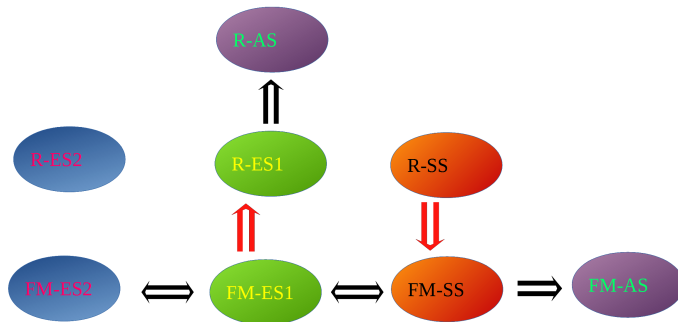
où les conditions initiales sont données par $x_{0,j} = (x_{0,j}^h, x_{0,j}^v)^T$ et $x_{i,0} = (x_{i,0}^h, x_{i,0}^v)^T$.

Relations entre les différentes notions de stabilité :



R-SS $\Rightarrow$ R-ES1

Relations entre les différentes notions de stabilité :



R-SS $\Rightarrow$ R-ES1

Supposons que (1) est stable structurellement, $\forall |\lambda|, |\mu| \leq 1$,

$$\det \left(I_{n_1+n_2} - \begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \lambda A_{12} \\ \mu A_{21} & \mu A_{22} \end{pmatrix} \right) \neq 0$$
$$\Leftrightarrow \det \left(I_{n_1+n_2} - \lambda \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \right) \neq 0.$$

Le modèle FM associé est donc aussi SS et donc ES1.

R-SS $\Rightarrow$ R-ES1

Il existe $M > 0$ et $0 < q < 1$ tels que

$$\|x_{i,j}\| \leq M \left(\sum_{k=0}^j \frac{\|x_{0,k}\|}{q^{k+1}} + \sum_{k=0}^i \frac{\|x_{k,0}\|}{q^{k+1}} \right) q^{i+j}.$$

R-SS $\Rightarrow$ R-ES1

Il existe $M > 0$ et $0 < q < 1$ tels que

$$\|x_{i,j}\| \leq M \left(\sum_{k=0}^j \frac{\|x_{0,k}\|}{q^{k+1}} + \sum_{k=0}^i \frac{\|x_{k,0}\|}{q^{k+1}} \right) q^{i+j}.$$

Inégalité vérifiée pour toutes conditions initiales, en particulier pour $x_{0,j} = (x_{0,j}^h, 0_{n_2})^T$ et $x_{i,0} = (0_{n_1}, x_{i,0}^v)^T$.

R-SS $\Rightarrow$ R-ES1

Il existe $M > 0$ et $0 < q < 1$ tels que

$$\|x_{i,j}\| \leq M \left(\sum_{k=0}^j \frac{\|x_{0,k}\|}{q^{k+1}} + \sum_{k=0}^i \frac{\|x_{k,0}\|}{q^{k+1}} \right) q^{i+j}.$$

Inégalité vérifiée pour toutes conditions initiales, en particulier pour $x_{0,j} = (x_{0,j}^h, 0_{n_2})^T$ et $x_{i,0} = (0_{n_1}, x_{i,0}^v)^T$.

$\exists \alpha, \alpha' > 0$ tels que

$$\left\| (x_{0,j}^h, 0_{n_2})^T \right\| \leq \alpha \left\| (x_{0,j}^h, 0_{n_2})^T \right\|_2 = \alpha \left\| x_{0,j}^h \right\|_2 \leq \alpha \alpha' \left\| x_{0,j}^h \right\|.$$

R-SS $\Rightarrow$ R-ES1

Il existe $M > 0$ et $0 < q < 1$ tels que

$$\|x_{i,j}\| \leq M \left(\sum_{k=0}^j \frac{\|x_{0,k}\|}{q^{k+1}} + \sum_{k=0}^i \frac{\|x_{k,0}\|}{q^{k+1}} \right) q^{i+j}.$$

Inégalité vérifiée pour toutes conditions initiales, en particulier pour

$$x_{0,j} = (x_{0,j}^h, 0_{n_2})^T \text{ et } x_{i,0} = (0_{n_1}, x_{i,0}^v)^T.$$

$\exists \alpha, \alpha' > 0$ tels que

$$\|(x_{0,j}^h, 0_{n_2})^T\| \leq \alpha \|(x_{0,j}^h, 0_{n_2})^T\|_2 = \alpha \|x_{0,j}^h\|_2 \leq \alpha \alpha' \|x_{0,j}^h\|.$$

$$\|x_{i,j}\| \leq M \alpha \alpha' \left(\sum_{k=0}^j \frac{\|x_{0,k}^h\|}{q^{k+1}} + \sum_{k=0}^i \frac{\|x_{k,0}^v\|}{q^{k+1}} \right) q^{i+j}.$$

et (1) est R-ES1.

R-ES1 $\Rightarrow$ R-SS

Supposons que (1) est R-ES1. Par construction les CI du modèle de Fornasini équivalent vérifient : $\|x_{0,j}\| \geq K \|x_{0,j}^h\|$ et

$\|x_{i,0}\| \geq K' \|x_{i,0}^v\|$ pour $K, K' > 0$. Ainsi, on a l'existence de $M > 0$ et $q \in (0, 1)$ tels que

$$\begin{aligned} \|x_{i,j}\| &\leq M \left(\sum_{k=0}^j \frac{\|x_{0,k}^h\|}{q^{k+1}} + \sum_{k=0}^i \frac{\|x_{k,0}^v\|}{q^{k+1}} \right) q^{i+j}, \\ &\leq M \max\left(\frac{1}{K}, \frac{1}{K'}\right) \left(\sum_{k=0}^j \frac{\|x_{0,k}\|}{q^{k+1}} + \sum_{k=0}^i \frac{\|x_{k,0}\|}{q^{k+1}} \right) q^{i+j}, \end{aligned}$$

et le modèle FM équivalent est FM-ES1 et donc FM-SS.

R-ES1 $\Rightarrow$ R-SS

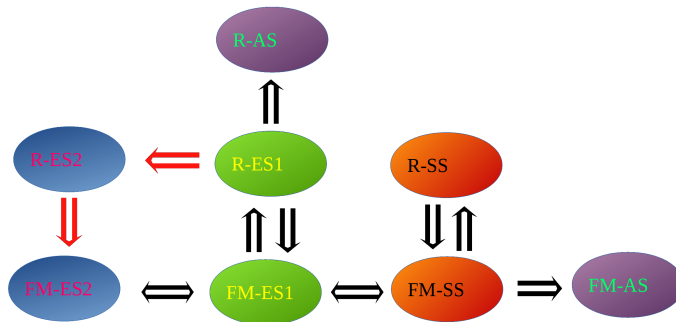
$$\forall |\lambda|, |\mu| \leq 1,$$

$$\det \left(I_n - \lambda \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \right) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \det \left(I_{n_1+n_2} - \begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \lambda A_{12} \\ \mu A_{21} & \mu A_{22} \end{pmatrix} \right) \neq 0,$$

qui est, par définition, R-SS.

Relations entre les différentes notions de stabilité :



Le contre-exemple : R-AS pas R-SS

$$\begin{pmatrix} x_{i+1,j}^h \\ x_{i,j+1}^v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{i,j}^h \\ x_{i,j}^v \end{pmatrix}.$$

Le contre-exemple : R-AS pas R-SS

$$\begin{pmatrix} x_{i+1,j}^h \\ x_{i,j+1}^v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{i,j}^h \\ x_{i,j}^v \end{pmatrix}.$$

On peut calculer les solutions : $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2$,

$$x_{i,j}^h = \sum_{k=0}^j \binom{i+k-1}{k} \frac{1}{2^{i+k}} x_{0,j-k}^h + \sum_{k=0}^{i-1} \binom{j+k}{k} \frac{1}{2^{k+j+2}} x_{i-1-k,0}^v,$$

$$x_{i,j}^v = \sum_{k=0}^{j-1} \binom{i+k}{k} \frac{1}{2^{i+k}} x_{0,j-k-1}^h + \sum_{k=0}^i \binom{j+k-1}{k} \frac{1}{2^{k+j}} x_{i-k,0}^v.$$

Ce modèle n'est pas R-SS car pour $\lambda = \mu = 1$,

$$\det \left(I_2 - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix} \right) = 0.$$

Ce modèle n'est pas R-SS car pour $\lambda = \mu = 1$,

$$\det \left(I_2 - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix} \right) = 0.$$

On peut montrer qu'il est R-AS en montrant qu'il est attractif (ce qui est suffisant). Pour x^h par exemple :

Ce modèle n'est pas R-SS car pour $\lambda = \mu = 1$,

$$\det \left(I_2 - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix} \right) = 0.$$

On peut montrer qu'il est R-AS en montrant qu'il est attractif (ce qui est suffisant). Pour x^h par exemple :

$$|x_{i,j}^h| \leq \underbrace{\left| \sum_{k=0}^j \binom{i+k-1}{k} \frac{1}{2^{i+k}} x_{0,j-k}^h \right|}_{:= S_{i,j}^1} + \underbrace{\left| \sum_{k=0}^{i-1} \binom{j+k}{k} \frac{1}{2^{k+j+2}} x_{i-1-k,0}^v \right|}_{:= S_{i,j}^2}.$$

$$\begin{aligned}
|S_{i,j}^1| &\leq \frac{1}{2^i} \sum_{k=0}^j \binom{i+k-1}{k} \frac{1}{2^k} |x_{0,j-k}^h|, \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2^i} \sum_{k=0}^{j-N_0} \binom{i+k-1}{k} \frac{1}{2^k} + \frac{\|x_{0,\cdot}^h\|_\infty}{2^i} \sum_{k=j-N_0+1}^j \binom{i+k-1}{k} \frac{1}{2^k}, \\
&\leq \underbrace{\frac{1}{2^i} \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{i+k-1}{k} \frac{1}{2^k}}_1 + \frac{\|x_{0,\cdot}^h\|_\infty}{2^i} \sum_{k=j-N_0+1}^j \binom{i+k-1}{k} \frac{1}{2^k}, \\
&\quad = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2})^i} \\
&\leq \varepsilon + \frac{\|x_{0,\cdot}^h\|_\infty}{2^i} \sum_{k=j-N_0+1}^j \binom{i+k-1}{k} \frac{1}{2^k}.
\end{aligned}$$

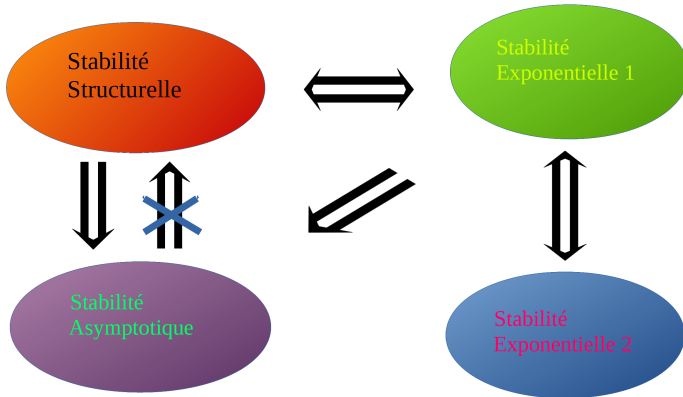
$$\forall k \leq j, \binom{i+k-1}{k} \leq \binom{i+k}{k} \leq \binom{i+j}{i} \leq \binom{i+j}{\lfloor \frac{i+j}{2} \rfloor}.$$

$$\begin{aligned} |S_{i,j}^1| &\leq \varepsilon + \frac{\|x_{0,\cdot}^h\|_\infty}{2^i} \binom{i+j}{i} \sum_{k=j-N_0+1}^j \frac{1}{2^k}, \\ &\leq \varepsilon + \frac{\|x_{0,\cdot}^h\|_\infty}{2^i} \binom{i+j}{i} \frac{2^{N_0}}{2^j}, \\ &\leq \varepsilon + \frac{2^{N_0} \|x_{0,\cdot}^h\|_\infty}{2^{i+j}} \binom{i+j}{\lfloor \frac{i+j}{2} \rfloor}. \end{aligned}$$

Stirling, $\frac{1}{2^n} \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{n\pi}}$, pour $n = i + j$, on obtient le résultat.

Nouvelles Relations pour le Roesser

Roesser:



Non-linéaire :

